

ECON 2200, Summer, hjørneløsninger og ligningssystemer - handout

Kjell Arne Brekke

April 27, 2012

1 Summer

1.1 Notasjon

Summen av de ti første oddetallene blir:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$$

Hva med summen av de 300 første oddetallene? Nå blir det tungvint å skrive alle. Vi kunne droppe dem i midten,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 599 = 90000$$

men det er ikke alltid opplagt hva som skal stå der vi har satt ..., vi trenger en mer presis skrivemåte.

Oddetall nummer i er lik $2i - 1$. Vi kan da skrive summen av de 100 første oddetallene som

$$\sum_{i=1}^{100} (2i - 1)$$

Tegnet \sum er en stor gresk S og står for sum. Under står det at "summasjonsvariabelen starter på $i = 1$ og over er det angitt hvor den ender, vi går altså helt til $i = 100$. De tallene vi skal legge sammen er altså oddetallene $(2i - 1)$.

Oppgave 1 *Skriv summen $1+4+9+16+25+36$ med summasjonsnotasjon.*

1. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = \sum_{i=1}^{36} i$

2. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = \sum_{i=1}^{36} i^2$

3. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = \sum_{i=1}^6 i^2$

1.2 Geometriske rekker

En for for sum som er viktig i økonomi er summen av geometriske rekker. En geometrisk rekke er en rekke tall der neste tall er a ganger så stor som forrige, for en eller annen a . For eksempel er nåverdien av en konstant innbetaling av 1000 kroner i året over 10 år lik

$$\begin{aligned} & 1000 \left(1 + \frac{1}{1+r} + \left(\frac{1}{1+r} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{1+r} \right)^9 \right) \\ &= 1000 \sum_{i=0}^9 \left(\frac{1}{1+r} \right)^i \end{aligned}$$

Her er $a = \frac{1}{1+r}$, men la oss starte med summen av en enklere geometrisk rekke hvor hvert tall er det dobbelte av forrige

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \\ &= \sum_{i=0}^4 2^i \end{aligned}$$

Merk at om vil ganger alt med $a = 2$ får vi

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$

Vi ser at det er bare det første og det siste tallet som er ulikt, så når vi tar differansen kansellere de fleste leddene.

$$\begin{aligned} 2S - S &= \quad \quad + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \\ &\quad - 1 - 2 - 4 - 8 - 16 \\ &= 32 - 1 = 31 \end{aligned}$$

Oppgave 2 *Bruk samme metode til å regne ut summen*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{10} 2^i \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 \end{aligned}$$

1. Vi finner da at $2S - S = 2048 - 1$ som gir $S = 2047$
2. Vi finner da at $2S - S = 1024 - 1$ som gir $S = 1023$
3. Vi finner da at $4S - 2S = 4096 - 1$ som gir $S = 2047$

2 Hjørneløsninger.

Finn maksimum for funksjonen

$$f(x) = 10 + 3x \text{ med definisjonsområde } 0 \leq x \leq 10.$$

Denne funksjonen er strengt voksende, så x skal være så stor som mulig, men definisjonsområdet går bare opp til $x = 10$. Så funksjonen oppnår sitt maksimum for $x = 10$, selv om $f'(x) \neq 0$. Siden løsningen er i "hjørnet" av definisjonsområdet kaller vi det en **hjørneløsning**. Det motsatte er en "**indre**" løsning, der vil alltid førsteordet betingelsen gjelde.

Betrakt en konsument med nyttefunksjon

$$u(c_1, c_2) = 4c_1 + c_2$$

og budsjettbetingelse

$$c_1 + c_2 = 10$$

Nå er

$$c_2 = 10 - c_1$$

som kan settes inn i nyttefunksjonen

$$\begin{aligned} u &= 4c_1 + 10 - c_1 \\ &= 3c_1 + 10 \end{aligned}$$

Siden vi snakker om konsum må $c_1 \geq 0$, og $c_2 \geq 0$. Det siste betyr at

$$\begin{aligned} 10 - c_1 &\geq 0 \\ c_1 &\leq 10 \end{aligned}$$

Med andre ord

$$0 \leq c_1 \leq 10$$

Så vi ser vi har samme problem som over og maksimum er gitt ved $c_1 = 10$, selv om det ikke tilfredsstiller en førsteordensbetingelse.

Nyttemaksimeringen

$$\max u(x, y) = \ln x + y \text{ med budsjettebetingelse } 3x + y = m$$

Kan skrives om som

$$\max_x \ln x + m - 3x \text{ med kravet } y = m - 3x \geq 0$$

Oppgave 3 For visse verdier av m har systemet ovenfor en hjørneløsning $y = 0$. For hvilke verdier av m gjelder dette?

1. Vi har en hjørneløsning når $m \geq 1$
2. Vi har en hjørneløsning når $m \leq 1$
3. Vi har en hjørneløsning når $m \geq 3$
4. Vi har en hjørneløsning når $m \leq 3$

3 Systemer av ligninger (Sydsæter 12.11)

Betrakt et typisk nyttemaksimeringsproblem (hvor vi antar indre løsning)

$$\max u(c_1, c_2)$$

med bibetingelse fra budsjettbetingelsen

$$p_1c_1 + p_2c_2 = m \tag{1}$$

Vi kan løse det med Lagranges metode

$$L = u(c_1, c_2) - \lambda(p_1c_1 + p_2c_2 - m)$$

som gir to betingelser for stasjonærpunktene

$$u'_{c_1}(c_1, c_2) = \lambda p_1 \tag{2}$$

$$u'_{c_2}(c_1, c_2) = \lambda p_2 \tag{3}$$

De 3 - tre - ligningene som har fått nummer kan nå brukes til å bestemme 3 - tre - ukjente c_1 , c_2 , og λ . Dette er et eksempel på **telleregelen**: Vi trenger normalt like mange ligninger som ukjente for å få bestemt alle ukjente.

Jeg skriver her 'normalt', for regelen gjelder ikke alltid. Eksempel:

$$x^2 = -4$$

Her er det en ligning og en ukjent, men det finnes likevel ingen løsning (om vi krever at x er reell).

Om vi har flere ligninger enn ukjente vil vi normalt heller ikke ha en løsning, f.eks.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 5 \\ y - x &= 2 \end{aligned}$$

(De to første ligningene har løsning $y = 2$ og $x = 1$ men det strir mot den siste ligningen. Det finnes altså ingen verdier av x og y som løser alle ligningene.)

Om vi har færre ligninger enn ukjente kan vi ofte velge en av de ukjente fritt. Ta et eksempel med en ligningen

$$x + y^2 = 5$$

Om vi her velger $x = 1$ kan vi ikke velge y for det følger at $y = 2$ men vi kan også velge $x = -4$ da må $y = 3$ eller vi kan velge y f.eks. $y = 1$ men kan da ikke velge x som blir $x = 3$. Når vi kan velge en variabel og resten følger automatisk, sier vi at vi har **èn frihetsgrad**.

Oppgave 4 Om vi velger $x = -11$ hva må y være? Kan vi velge $x = 9$?

1. Ja
2. Nei

Om vi setter en avgift t på en vare vet vi at markedsklarering betyr

$$T(p^*) = E(p^* + t)$$

der p er produsentpris og T, E er tilbud og etterspørsel. Her vil både likevektspris $p^*(t)$ og tilhørende kvantum $q^*(t) = T(p^*(t))$ avhenge av t . Om myndighetene ønsker en bestemt pris \hat{p} , kan de velge $t = \hat{t}$ slik at

$$p^*(\hat{t}) = \hat{p}$$

Om de ønsker ett bestemt kvantum \tilde{q} kan de velge $t = \tilde{t}$ slik at

$$q^*(\tilde{t}) = \tilde{q}.$$

Men med mindre det slumper til å være slik at $\hat{t} = \tilde{t}$, vil de ikke kunne nå begge mål på en gang, det ville kreve at vi fant en t slik at:

$$\begin{aligned} p^*(t) &= \hat{p} \\ q^*(t) &= \tilde{q} \end{aligned}$$

Vi har da to ligninger men bare en ukjent t . Det går ikke i henhold til telleregelen.

Oppgave 5 Anta myndighetene kan regulere 7 ulike avgifter, avgiftene t_1, \dots, t_7 . Avgiftene påvirker N ulike størrelser $x_i(t_1, t_2, t_3, \dots, t_7)$ for $i = 1, \dots, N$. Myndighetene har målsetninger for hver av størrelsene

$$\begin{aligned} x_1(t_1, t_2, t_3, \dots, t_7) &= \bar{x}_1 \\ x_2(t_1, t_2, t_3, \dots, t_7) &= \bar{x}_2 \\ &\dots \\ x_N(t_1, t_2, t_3, \dots, t_7) &= \bar{x}_N \end{aligned}$$

Hvor mange målsetninger N vil myndighetene kunne kontrollere i henhold til telleregelen.